

УДК 532.546

**О ВЛИЯНИИ ИСПАРЕНИЯ ИЛИ ИНФИЛЬТРАЦИИ НА
СВОБОДНУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ГРУНТОВЫХ ВОД
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ**

Береславский Э.Н.

Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации

В рамках теории плоской установившейся фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси рассматриваются две схемы, моделирующие фильтрационные течения под шпунтом Жуковского через грунтовой массив, подстилаемый непроницаемым основанием или сильнопроницаемым напорным водоносным горизонтом. Для исследования влияния испарения или инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод формулируются смешанные краевые задачи теории аналитических функций, которые решаются с помощью метода Полубариновой-Кочкиной. На базе этих моделей разработаны алгоритмы расчета зоны насыщения в случаях, когда при движении воды приходится учитывать совместное влияние на картину течения таких важных факторов, как подпор со стороны непроницаемого основания или нижележащего хорошо проницаемого водоносного пласта, испарение или инфильтрация на свободной поверхности грунтовых вод, капиллярность грунта.

Ключевые слова: фильтрация, инфильтрация, испарение, грунтовые воды, свободная поверхность, шпунт Жуковского, метод Полубариновой-Кочкиной, комплексная скорость, конформные отображения, уравнения класса Фукса.

**ON THE EFFECT OF EVAPORATION OR INFILTRATION ON THE
FREE GROUNDWATER SURFACE IN SOME
PROBLEMS OF UNDERGROUND HYDROMECHANICS**

Bereslavskiy E.N.

St. Petersburg State University of Civil Aviation

Two schemes of fluid flow under the rabbit of Zhukovsky are considered. Filtering is flat and steady, and the fluid flow satisfy Darcy's law. The movement occurs through an array of ground underlain by a waterproof base or well-permeable pressure aquifer. For study evaporation and infiltration to the free surface of groundwater is formulated a mixed boundary value problem of the theory of analytic functions, which is solved by the Polubarinova-Cochina's method. In the zone of saturation algorithms for calculating the basis of these models are designed in cases where the motion of water must take into account the joint effect on the flow pattern of such important factors as backwater from the impermeable base or underlying well permeable aquifer, evaporation or infiltration on the free surface groundwater and the capillary of ground

Key words: filtration, infiltration, evaporation, groundwater, free surface, tongue of Zhukovsky, Polubarinova-Cochina's method, complex velocity, conformal mappings, Fuchsian equation.

Задача об обтекании шпунта впервые была исследована Н.Е.Жуковским [1], где видоизмененный им метод Кирхгофа в теории струй был использован для решения задач со свободной поверхностью и была введена специальная аналитическая функция, которая широко применяется в подземной гидромеханике и теории фильтрации. С тех пор как сама функция, так и задача и шпунт носят имя Жуковского [2–6]. Работа [1] открыла возможность математического моделирования движений под шпунтом Жуковского и положила начало исследованиям указанного класса фильтрационных течений.

Ниже на примере рассмотрения двух схем, которые возникают при обтекании шпунта Жуковского влияние испарения и инфильтрации подвергаются специальному изучению. Первая из них соответствует случаю, когда слой грунта подстилается на всем своем протяжении непроницаемым основанием и со свободной поверхности происходит испарение, во второй задаче – нижележащий пласт представляет целиком хорошо проницаемый напорный водоносный горизонт и происходит инфильтрация на свободную поверхность грунтовых вод.

Приводится единообразная методика решения задач, которая позволяет учесть при исследовании все фильтрационные характеристики, что дает возможность оценить совместное влияние последних на картину явления. Для этой цели используется метод П.Я. Полубариновой-Кочиной [2–6].

Учет специфики и характерных особенностей рассматриваемого течения позволяет представить решение через элементарные функции, что делает его использование наиболее простым и удобным.

Объекты и методы исследования

1. Обтекание шпунта Жуковского при наличии в основании горизонтального водоупора. Рассмотрим двумерную установившуюся фильтрацию жидкости при обтекании шпунта Жуковского длины S в однородном и изотропном слое грунта мощности T , подстилаемом горизонтальным непроницаемым основанием при равномерном испарении со свободной поверхности интенсивности ε ($0 < \varepsilon < 1$). Течение обеспечивается поступлением воды с поверхности земли с неизменным во времени слоем жидкости.

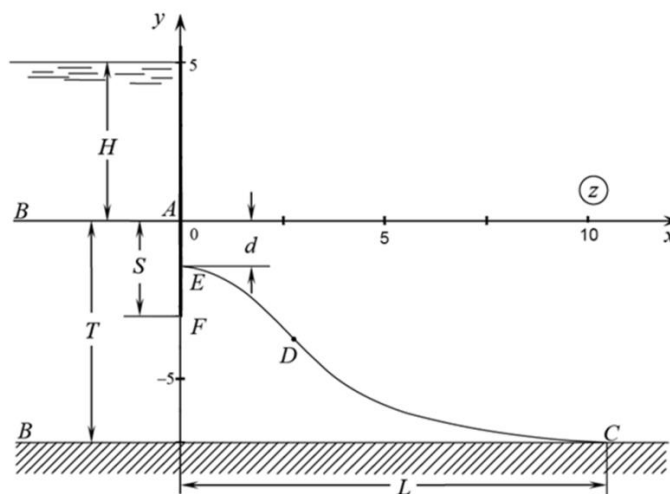


Рис. 1. Область течения задачи

Вводится комплексный потенциал движения $\omega = \varphi + i\psi$, где φ – потенциал скорости, ψ – функция тока, и комплексная координата $z = x + iy$, отнесенные к κT и T , где $\kappa = \text{const}$ – коэффициент фильтрации грунта. Задача состоит в нахождении комплексного потенциала $\omega(z)$ как функции, аналитической в области фильтрации z и удовлетворяющей следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} AB: y = 0, \varphi = -H; \quad BC: y = -T, \psi = 0; \\ CDE: \varphi = -y + h_c, \psi = -\varepsilon x + Q; \quad EA: x=0, \psi = Q. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь h_c – статическая высота капиллярного поднятия грунтовой воды, Q – искомый фильтрационный расход воды. Полагая во втором условии (1.1) для участка CDE $x = L$, получим

$$Q = \varepsilon L. \quad (1.2)$$

Для решения задачи используем метод Полубариновой-Кочкиной [2–6], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [7].

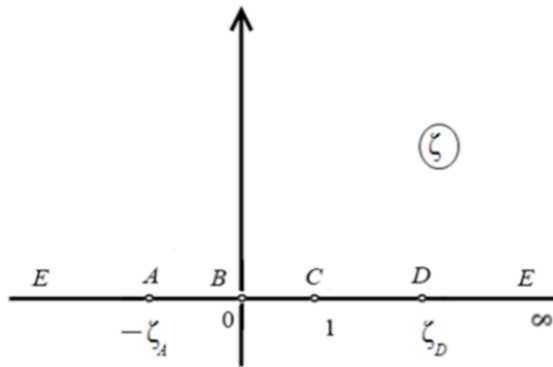


Рис. 2. Область вспомогательной переменной ζ

Вводится вспомогательная переменная ζ и функции: $z(\zeta)$ – конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\text{Im } \zeta > 0$ на область z (соответствие точек указано на рисунке 2), комплексная скорость $w = d\omega/dz$, а также

$$Z = dz/d\zeta, \quad \Omega = d\omega/d\zeta. \quad (1.3)$$

Определяя характеристические показатели функций Z и Ω около особых точек [2,3], найдем, что они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [2,3,7]:

$$P \left\{ \begin{matrix} -\zeta_A & 0 & 1 & \zeta_D & \infty \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1+v}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1-v}{2} & 2 & 2 \end{matrix} \right\} \zeta = \frac{Y}{\zeta \sqrt{(\zeta + \zeta_A)(1 - \zeta)^{(1+v)}}}, \quad Y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & \zeta_D & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1+v}{2} \\ \frac{1}{2} & v & 2 & -\frac{v}{2} \end{matrix} \right\} \zeta, \quad (1.4)$$

где $\nu = 2 \arctg \sqrt{\varepsilon}$. Видно, что точка $\zeta = -\zeta_A$ – обыкновенная точка для функции Y , представляющей последний символ Римана, ему соответствует следующее линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с четырьмя регулярными особыми точками:

$$Y'' + \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{1-v}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta-\zeta_D} \right) Y' + \frac{v(1+v)\zeta + \lambda_0}{4\zeta(\zeta-1)(\zeta-\zeta_D)} Y = 0, \quad (1.5)$$

где λ_0 – аксессуарный параметр. Напомним, что в уравнении (1.5) прообраз ζ_D вершины разреза D , а также аксессуарная постоянная λ_0 остаются неизвестными при постановке задачи.

Обратимся к области комплексной скорости w (рисунок 3), соответствующей граничным условиям (1.1).

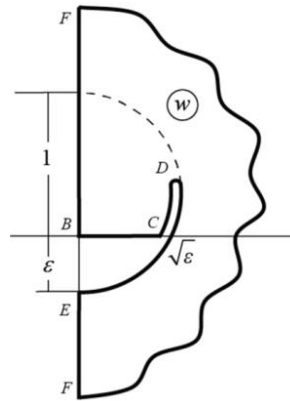


Рис. 3. Область комплексной скорости w

Это область, представляющая собой круговой четырехугольник с двумя прямыми углами, углом πv при вершине C и разрезом с вершиной в точке D , принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [8–11]. Учитывая специфические свойства таких областей, связанные с обилием прямых углов и наличием разреза, удобно произвести замену переменных $\zeta = th^2t$, которая преобразует уравнение (1.5) к виду

$$\begin{aligned} & [(\zeta_D - 1)ch^2t + 1]ch^2tY'' + [v(\zeta_D - 1)ch^2t + 1 + v]sh 2tY' + \\ & + [(v^2 + v + \lambda_0)ch^2t - v^2 - v]Y = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

а верхнюю полуплоскость ζ переводит в горизонтальную полуполосу $Re t > 0, 0 < Im t < \pi/2$ плоскости t (рисунок 4).

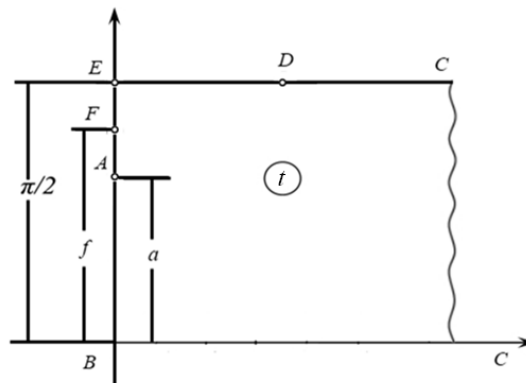


Рис. 4. Горизонтальная полуполоса плоскости t

При этом интегралы Y принимают следующий вид:

$$Y_1(t) = \frac{chtchvt + Csh tshvt}{ch^{1+v}t}, \quad Y_2(t) = \frac{chtshvt + Csh tchvt}{ch^{1+v}t}, \quad (1.7)$$

где $C = ctg f ctg vf$, a и f ($0 < a < f < \pi/2$) – неизвестные ординаты точек A и F плоскости t . Принимая во внимание соотношения (1.7), и учитывая, что $w = d\omega/dz$, получим:

$$\frac{dz}{dt} = M \frac{chtchvt + Csh tshvt}{\Delta(t)}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\epsilon} M \frac{chtshvt + Csh tchvt}{\Delta(t)}, \quad (1.8)$$

$$\Delta(t) = \sqrt{\sin^2 a + sh^2 t},$$

где $M > 0$ – масштабная постоянная моделирования.

Ниже предлагается способ, основанный на непосредственном использовании уравнения фуксового типа, интегралами которого являются тригонометрические функции синус и косинус. В верхней полуплоскости ζ удобно выбрать иное соответствие точек:

$$-\infty = \zeta_D < \zeta_E = 0 < \zeta_A < \zeta_B < \zeta_C = 1 < \zeta_D = \infty. \quad (2.2)$$

Определяя характеристические показатели функций Z и Ω около особых точек [2,3], найдем, что в данном случае они являются линейными комбинациями двух ветвей следующей функции Римана [2,3,7]:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & \zeta_A & \zeta_B & 1 & \infty \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 4 \end{array} \right\} \zeta = \frac{Y}{(\zeta_B - \zeta)(1 - \zeta)\sqrt{(\zeta_A - \zeta)}}, \quad Y = P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array} \right\}. \quad (2.3)$$

Из рассмотрения области w (рисунок 6) и соотношения (2.3) видно, что точки $\zeta = \zeta_A$ и $\zeta = \zeta_B$ – обыкновенные точки для функции Y , представляющей последний символ Римана, ему соответствует такое линейное дифференциальное уравнение класса Фукса с тремя регулярными особыми точками:

$$\zeta(1 - \zeta)Y'' + \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)Y' + Y = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) – это уравнение Гаусса [7,19]. Его канонические интегралы в окрестности точки $\zeta = 0$ выражаются через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$ и в данном случае имеют вид

$$Y_1(\zeta) = F\left(-1, 1, \frac{1}{2}, \zeta\right), \quad Y_2(\zeta) = \sqrt{\zeta} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \zeta\right). \quad (2.5)$$

Замена переменных $\zeta = \sin^2 t$ переводит верхнюю полуплоскость ζ в вертикальную полуполосу $0 < \text{Re } t < \pi/2, \text{Im } t > 0$ плоскости t , а интегралы (2.5) преобразует к виду

$$Y_1 = \sin 2t, \quad Y_2 = \cos 2t. \quad (2.6)$$

Принимая во внимание (2.6) и учитывая, что $w = d\omega/dz$, придем к искомым зависимостям

$$\frac{dz}{dt} = iM \frac{\sin 2(t-f)}{\Delta(t)}, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\varepsilon M \frac{\sin 2f \sin 2(t-m)}{\sin 2m \Delta(t)}, \quad (2.7)$$

$$\Delta(t) = (\sin^2 b - \sin^2 t) \cos t \sqrt{\sin^2 a - \sin^2 t},$$

где m и f – прообразы точек M и F ($0 < m < f < a < b < \pi/2$), связанные соотношением

$$\text{tg } 2m \text{ ctg } 2f = \varepsilon. \quad (2.8)$$

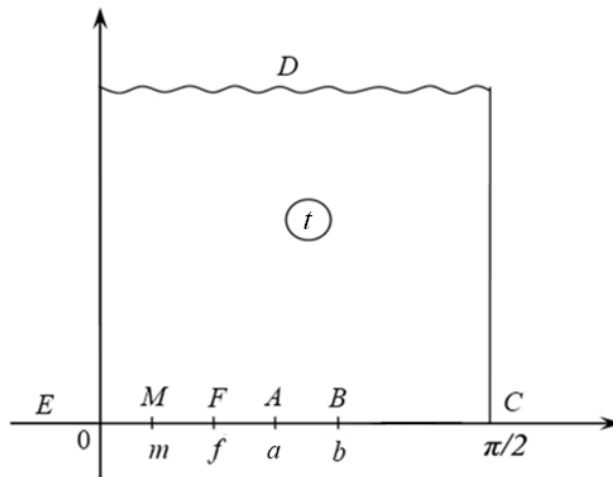


Рис. 7. Горизонтальная полуполоса плоскости t .

Отметим предельный случай течения, связанный с отсутствием инфильтрации, т.е. при $\varepsilon = 0$. Учитывая связь между параметрами m, f и ε (2.8), видим, что в случае, когда $\varepsilon = 0$, решение задачи вытекает из зависимостей (2.7) при $m = 0$, т.е. когда в плоскости w точки кривой депрессии C и E сливаются в начале координат с точкой M нулевой скорости.

Результаты и их обсуждение

Анализ численных результатов, полученных при расчете по схеме 1. На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.6, h_c = 0.5, T = 7, S = 3, H = 5$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε, h_c, T, S и H на размеры d и L приведены в таблице 1 и 2 (отрицательные величины d означают, что свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс).

Таблица 1

Результаты расчетов

ε	d	h	L	h_c	d	h	L	T	d	h	L
0.2	0.140	0.95	18.39	0	2.396	0.20	8.05	4	0.213	0.93	6.40
0.4	1.463	0.51	11.31	0.25	2.315	0.23	8.21	5	0.885	0.71	7.06
0.8	2.759	0.08	6.72	1	2.073	0.31	8.70	6	1.559	0.48	7.72
0.9	2.965	0.01	6.13	2	1.751	0.42	9.35	8	2.912	0.03	9.03

Таблица 2

Результаты расчетов

S	d	h	L	H	d	h	L
3	2.234	0.26	8.38	3	2.885	0.04	7.06
4	2.392	0.40	8.05	4	2.559	0.15	7.72
5	2.519	0.50	7.79	7	1.912	0.36	9.02
6	2.626	0.56	7.57	8	1.272	0.58	10.32

В таблицах 1 и 2 приводится также безразмерная величина $h(d) = (S - d)/S, h(S) = 0$, которая характеризует относительную высоту поднятия грунтовой воды за шпунтом. На рисунке 8 представлены зависимости d (кривая 1) и L (кривая 2) от параметра ε .

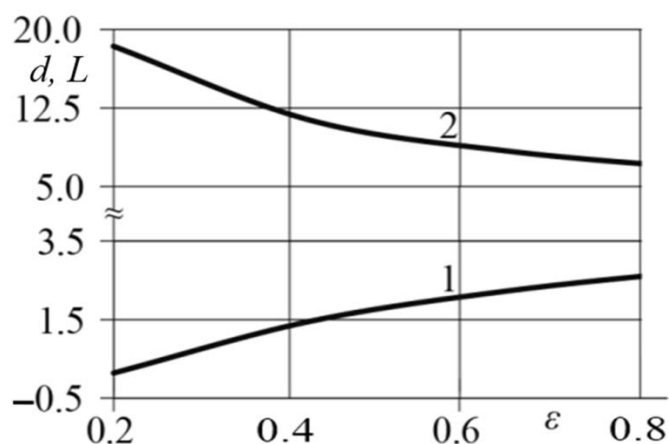


Рис. 8. Зависимости d (кривая 1) и L (кривая 2) от параметра ε .

Анализ данных таблиц и графика позволяет сделать следующие выводы. Прежде всего, обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин d и L от параметров ε и S с одной стороны и в то же время совершенно противоположное поведение искомым характеристикам при изменении параметров h_c и H – с другой. Увеличение высоты вакуума, обусловленного капиллярными силами в грунте, и напора в бьефе и уменьшение интенсивности испарения, мощности слоя и длины шпунта приводят к уменьшению величины d , т. е. увеличению ординаты точки D выхода кривой депрессии из-под шпунта. Так, согласно таблице 1, увеличению параметров ε и H в 4.5 и 2.7 раза сопутствует изменению глубины d в 4.7 и 0.9 раза соответственно. Однако наибольшее влияние на величину d оказывает мощность пласта: данные таблицы 1 показывают, что при возрастании толщины слоя T всего в два раза, глубина d увеличивается почти в 14 раз.

Можно заметить, что зависимости d и L от параметров T и h_c близки к линейной.

Что касается величины L , то с увеличением статической высоты капиллярного поднятия грунтовой воды, мощности слоя и напора в бьефе, и уменьшением интенсивности испарения и длины шпунта ширина растекания жидкости по водоупору увеличивается. Так, из таблиц 1 и 2 видно, что при варьировании параметров ε и H в 4.5 и 2.7 раза ширина L увеличивается в 3 и 1.5 раза соответственно. Наибольшее же влияние, как и прежде, оказывает мощность слоя: из таблицы 1 следует, что изменение параметра T в два раза приводит к увеличению ширины L больше, чем на 40%.

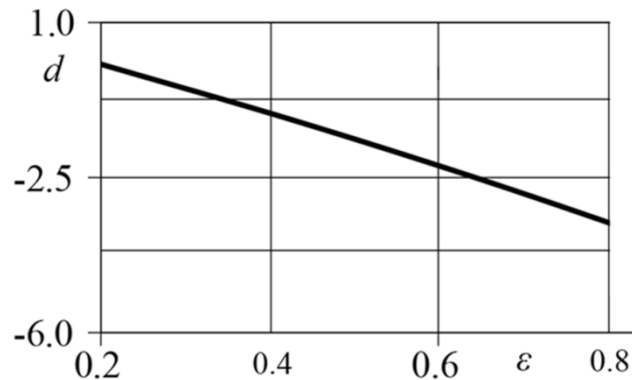
Разделы таблицы 1 и 2, относящиеся к параметру h_c , показывают, что для всех расчетных вариантов оказывается $d > 0$ и, следовательно, $0 < h < 1$. Видно, что наибольшее и наименьшее значения величины h достигаются при варьировании интенсивности испарения: $\max h(d) = 0.95$ при $\varepsilon = 0.2$ и $\min h(d) = 0.01$ при $\varepsilon = 0.9$.

Анализ численных результатов, полученных при расчете по схеме 2. На рисунке 5 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0.6$, $T = 7$, $S = 3$, $H = 7$, $H_0 = 3$ и $h_c = 100$. Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε , S , H и H_0 на величину d и параметр $h(d)$ представлены в таблице 3. На рисунке 9 представлена зависимость величины d от параметра ε .

Таблица 3

Результаты расчетов

ε	d	h	S	d	h	H	d	h	H_0	d	h
0.2	0.058	0.98	1	-3.905	4.91	3	0.631	0.79	1	-2.217	1.74
0.4	-1.209	1.40	2	-3.211	2.61	5	-0.968	1.32	2	-2.399	1.80
0.8	-4.072	2.36	4	-1.996	1.50	8	-3.399	2.13	4	-2.774	1.92
0.9	-4.860	2.62	5	-1.434	1.29	9	-4.217	2.41	5	-2.968	1.99

Рис. 9. Зависимость величины d от параметра ε .

Анализ данных таблиц и графика позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение интенсивности инфильтрации и напоров в бьефе и нижележащем горизонте и уменьшение мощности слоя и длины шпунта приводят к уменьшению величины d . Напомним, что ранее в схеме 1 к подобному поведению величины d приводило, наоборот, уменьшение интенсивности испарения. Так, при варьировании параметров T и H в 1.8 и 3 раза величина d изменяется в 7.8 и 6.7 раза соответственно. Однако наибольшее влияние на глубину d оказывает теперь именно инфильтрация на свободную поверхность: из таблицы 3 следует, что с увеличением параметра ε в 4.5 раза величина d изменяется почти в 84 раза.

Расчеты показывают, что при варьировании параметра T величина $T - d = 9.584$ является постоянной для рассматриваемых значений мощности слоя.

Что касается параметра $h(d)$, то в отличие от схемы 1, где наблюдались только лишь положительные значения величины d , здесь для абсолютного большинства расчетных вариантов оказывается $d < 0$, т. е. кривая депрессии поднимается выше оси абсцисс и, следовательно, $h(d) > 1$. При этом значения параметра h могут быть весьма существенными: из таблицы 3 вытекает, что при $S = 1$ имеем $h(d) = 4.91$. Видно, что так же, как и в схеме 1, наименьшее значение величины h достигается при варьировании параметра ε : $\min h(d) = 0.98$ при $\varepsilon = 0.2$.

Выводы

На примерах двух задач об обтекании шпунта Жуковского разработана методика исследования влияния испарения и инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод, которая опирается на применение классического метода П.Я. Полубариновой-Кочиной. Показано, что картина течения при обтекании шпунта Жуковского существенно зависит от наличия испарения или инфильтрации, что сильно отражается на параметрах d или h , которые характеризуют высоту поднятия грунтовых вод за шпунтом.

Список литературы

1. Жуковский Н.Е. Просачивание воды через плотины // Опытнo-мелиоративная часть НКЗ. 1923. Вып. 30. С. 30–52.
2. Полубаринова–Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. – М.; – Л.: Изд-во АН СССР, 1942. 142 с.
3. Полубаринова–Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Гостехиздат, 1952. 676 с.; 2-изд. – М.: Наука, 1977, 664 с.
4. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. – М.: Гостехиздат, 1953, 616 с.
5. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967) / Отв.ред. Полубаринова-Кочина П. Я. – М.: Наука, 1969. 545 с.
6. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах // Механика в СССР за 50 лет. – М.: Наука, 1970. Т. 2. С. 585-648.
7. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; – Л.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
8. Корпенfels W., Stallmann F. Praxis der konformen Abbildung. Berlin: Springer, 1959. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: Изд-во Иност. лит., 1963. 406 с.
9. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О некоторых уравнениях класса Фукса в гидро- и аэромеханике // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 3–7.
10. Кочина П.Я., Береславский Э.Н., Кочина Н.Н. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений и некоторые задачи подземной гидромеханики. Ч.1.Препринт №567. – М.: Ин-т проблем механики РАН,1996.122 с.
11. Береславский Э.Н., Кочина П.Я. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в некоторых задачах механики жидкостей и газов // Изв. РАН. МЖГ. 1997. №5. С.9-17.
12. Ведерников В.В. К теории дренажа // Докл. АН СССР. 1939. Т.XXIII. №4. С.335–337.
13. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. – М.; – Л.: Госстройиздат,1939.248 с.
14. Ведерников В.В. К теории дренажа // Докл. АН СССР. 1948. Т.LIX. №6. С.1069–1072.
15. Ведерников В.В. Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя // Докл. АН СССР. 1949. Т.LXIX. №5. С.619–622.
16. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Притекание грунтовой воды со свободной поверхностью к системе дрен при глубоком залегании водоупора // Изв. АН СССР. ОТН. 1941. №1. С.126–128.
17. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Движение грунтовой воды со свободной поверхностью через плотину с двумя диафрагмами // Изв. АН СССР. ОТН. 1941. №3. С.39–44.
18. Нельсон-Скорняков Ф.Б. Фильтрация в однородной среде. – М.: Советская наука, 1947.279 с., 2-е изд.,1949.568 с.
19. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971.1108 с.

Береславский Эдуард Наумович, д.ф-м.н., профессор, Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации
196210, Санкт-Петербург, ул. Пилотов, 38
Телефон: (812) 704-18-18
E-mail: eduber@mail.ru